第 40 卷 第 4 期 2023 年 8 月
应 用 力 学 学 报 Chinese Journal of Applied Mechanics
Vol. 40 No. 4 Aug. 2023

文章编号:1000-4939(2023)04-0893-08

非高斯激励下带附加质量的悬臂梁响应研究

孟非凡[1],史庆轩[1,2,3]

(1. 西安建筑科技大学土木工程学院,710055 西安;2. 西安建筑科技大学结构工程与抗震教育部重点实验室,710055 西安;3. 西安建筑科技大学西部绿色建筑国家重点实验室,710055 西安)

摘 要:大多数悬臂梁的研究都是基于确定性振动分析或将外部激励假定为高斯过程,鲜少涉及非高斯激励。针对非高斯激励下带附加质量的悬臂梁的响应特征进行研究。首先,通过 Lagrange 方程建立考虑曲率非线性的悬臂梁振动方程;然后,通过指数多项式闭合法求解结构响应的概率密度函数,并分析了平均到达速率、激励强度及附加质量对结构响应的影响;同时分析了非平稳非高斯激励下非线性结构参数对响应的影响。计算结果表明,指数多项式闭合法与模拟解吻合很好,平均到达速率越大,结构响应的概率密度函数曲线收缩越明显。

关键词:泊松白噪声;附加质量;随机振动;指数多项式闭合法;概率密度函数

中图分类号:O324 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.04.019

Responses of the cantilever beam with a lumped mass under non-Gaussian excitation

MENG Feifan[1],SHI Qingxuan[1,2,3]

(1. School of Civil Engineering,Xi'an University of Architecture and Technology,710055 Xi'an,China;
2. Key Lab of Structure and Earthquake Resistance of the Education Ministry of China,
Xi'an University of Architecture and Technology,710055 Xi'an,China;
3. State Key Lab of Green Building in Western China,Xi'an University of Architecture and Technology,710055 Xi'an,China)

Abstract:Most of the research on cantilever beam is based on deterministic analysis or the assumed Gaussian excitation, non-Gaussian excitation is rarely involved. Stochastic responses of cantilever beam with lumped mass subjected to non-Gaussian random excitation are studied in this paper. Motion equation of the structure is established by the Lagrange's equation which considers curvature nonlinearity, approximate transient solutions of responses of structure are obtained by exponential polynomial closure (EPC) method. Effects of average arrival rate, excitation intensity and lumped mass on the structural response are analyzed. Meanwhile, the influence of nonlinear structural parameters on structural response under non-stationary and non-Gaussian excitation is also analyzed. Numerical results show that results obtained by the EPC method agree well with simulation solution. With the increase of the average arrival rate, the probability density function curve of structural response presents centralization.

收稿日期:2021-11-04 **修回日期**:2021-12-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11972273;51878540)
通信作者:史庆轩,教授。E-mail:shiqx@xauat.edu.cn
引用格式:孟非凡,史庆轩. 非高斯激励下带附加质量的悬臂梁响应研究[J]. 应用力学学报,2023,40(4):893-900.
MENG Feifan,SHI Qingxuan. Responses of the cantilever beam with a lumped mass under non-Gaussian excitation[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(4):893-900.

Key words: poisson white noise; lumped mass; random vibration; exponential polynomial closure; probability density function

很多结构可以简化成带附加质量的悬臂梁模型,如高耸建筑、海上钻井平台、信号塔和交通灯框架等,目前已有一些针对此类模型的研究。CRESPO DA SILVA 通过广义 Hamilton 准则推导了无轴向变形悬臂梁的三次非线性动力学方程[1],并考虑了曲率非线性[2]。随后,HYER 研究了悬臂梁在受迫振动下的空间动力学行为[3]。基于 Timoshenko 梁准则,HAMDAN 建立了带附加集中质量块的悬臂梁自由振动方程[4]。CHENG 利用 Hamilton 准则和 Lagrange 方程推导了考虑系统阻尼与高斯白噪声激励的悬臂梁运动方程,并利用随机等价线性化法研究了结构响应的统计矩[5]。WANG 推导了旋转锥形悬臂梁的横向振动方程[6]。目前,大多数的研究是基于确定性激励或者高斯激励,而基于非高斯激励下悬臂梁的响应特征却鲜有研究。众所周知,如果系统响应是马尔科夫过程,则系统响应的概率密度函数满足广义 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK)方程。而非高斯激励下系统的 FPK 方程含有对响应的四阶偏微分项,这使得它比高斯激励下非线性系统的响应求解过程要复杂得多,计算效率显著降低。然而众所周知,自然界中大多数激励的脉冲幅值都不是连续的,如罕遇地震的地面运动加速度、冲击波、作用在离岸结构海上的波浪、路面或轨道的不平坦对车辆的作用等,这些激励相邻的脉冲幅值间具有一定的时间间隔,简单地将外部激励看作高斯白噪声激励将使得计算的响应概率密度函数偏于不安全。因此,很多国内外学者研究了非高斯激励下系统响应的求解方法。

目前很多学者提出了非高斯激励下系统反应分析的方法,如随机等价线性化法[7-8]、随机平均法[9-10]、Wiener 路径积分法[11]及指数多项式闭合法(EPC)[12-13]等。这些方法大多是从高斯激励下系统反应分析方法发展而来。在众多方法中,指数多项式闭合法具有较高的精度与计算效率,而且可以得到系统瞬态响应的近似解析式。因此,本研究首先通过 Lagrange 方程建立非高斯激励下带附加集中质量悬臂梁的运动微分方程,利用指数多项式闭合法求解结构响应的概率密度函数,并分析非高斯激励的平均到达速率和激励强度对结构响应的影响、附加质量对结构参数及响应的影响。同时,分析了非平稳非高斯激励下激励参数对响应的影响。

1 随机微分方程

带附加质量的悬臂梁如图 1 所示。质量块 M 距基础 A 的距离记为 l',$\bar{m}$ 为杆件的线密度,假定杆件是均匀的,则 $\bar{m}$ 是一个常数,J 是质量块 M 的转动惯量,$\ddot{a}_g(t)$ 是地面运动加速度。

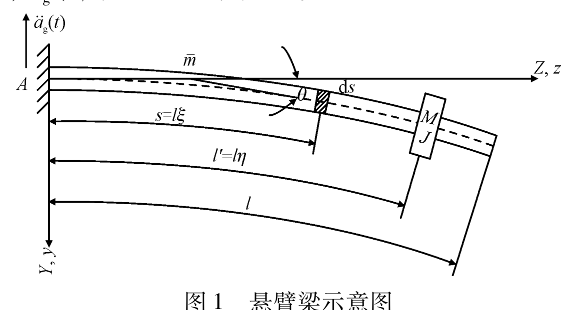


图 1 悬臂梁示意图

Fig. 1 Structure sketch map under external excitation

通过 Lagrange 方程可以建立悬臂梁的运动方程。采用文献[5]的结果,系统的势能可以表示为

$$U = \frac{1}{2}EIl\int_0^1 \kappa^2(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi = \frac{EI}{2l^3}\int_0^1\left[y''^2 + \left(\frac{y'y''}{l}\right)^2\right]\mathrm{d}\xi \tag{1}$$

其中,κ 表示曲率。根据 Euler 梁理论,考虑附加质量的影响,该系统的动能可以表示为

$$\begin{aligned} T =& \frac{\bar{m}l}{2}\int_0^1(\dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\Big|_{\xi=\eta} + \frac{1}{2}M(\dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)\Big|_{\xi=\eta} \\ =& \frac{\bar{m}l}{2}\int_0^1\left\{(\dot{y} - \dot{a}_g)^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^\xi \frac{y'^2}{l}\mathrm{d}\xi\right)\right]^2\right\}\mathrm{d}\xi + \\ & \frac{1}{2}M\left\{(\dot{y} - \dot{a}_g)^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^\xi \frac{y'^2}{l}\mathrm{d}\xi\right)\right]^2\right\}\Bigg|_{\xi=\eta} + \\ & \frac{J}{2l^2}\left[y'^2 + \left(\frac{\dot{y}'y'}{l}\right)^2\right]\Bigg|_{\xi=\eta} \end{aligned} \tag{2}$$

其中:$Y(\xi,t) = y(\xi,t)$;$Z(\xi,t) = z(\xi,t) - a_g(t)$。因此,Lagrange 方程可以表示为

$$L = T - U \tag{3}$$

该方程里含有响应与时间的偏导项,很难求得系统响应的解。通常将响应分解成状态空间与时间相互独立的量,即

$$y(\xi,t) = \varphi(\xi)x(t) \tag{4}$$

其中:$\varphi(\xi)$ 表示梁的一阶模态函数;$x(t)$ 为模态坐

标。一般情况下,悬臂梁的低阶模态起决定性作用,因此,本研究仅考虑一阶模态下悬臂梁的振动方程。

为方便起见,悬臂梁的附加集中质量块设置在梁的末端。根据文献[14],模态函数可以取

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}[\cosh\nu\xi - \cos\nu\xi - \zeta(\sinh\nu\xi - \sin\nu\xi)] \tag{5}$$

对于悬臂梁,取 $\nu = 0.734\,095\,5$,$\zeta = 1.875\,104\,1$。模态坐标下的 Lagrange 算子可以表示为

$$L = \frac{\bar{m}l}{2}\Big[\alpha_1\dot{x}^2 - 2\alpha_5\dot{a}_g\dot{x} + \frac{\alpha_3}{l^2}x^2\dot{x}^2 - \delta^2\alpha_2x^2 - \frac{\delta^2\alpha_4}{l^2}x^4 + (a_2+1)\dot{a}_g^2\Big] \tag{6}$$

其中:$\delta^2 = EI/(\bar{m}l^4)$;$a_1 = J/(\bar{m}l^3)$;$a_2 = M/(\bar{m}l)$;$\alpha_1 \sim \alpha_5$ 表示为

$$\begin{cases} \alpha_1 = \int_0^1 \varphi^2 \mathrm{d}\xi + a_1\varphi'^2(\eta) + a_2\varphi^2(\eta) \\ \alpha_2 = \int_0^1 \varphi''^2 \mathrm{d}\xi \\ \alpha_3 = \int_0^1 \left(\int_0^\xi \varphi'^2 \mathrm{d}\xi\right)^2 \mathrm{d}\xi + a_1\varphi'^4(\eta) + a_2\left(\int_0^\xi \varphi'^2\mathrm{d}\xi\right)^2\Big|_{\xi=\eta} \\ \alpha_4 = \int_0^1 \varphi'^2\varphi''^2 \mathrm{d}\xi \\ \alpha_5 = \int_0^1 \varphi \mathrm{d}\xi + a_2\varphi(\eta) \end{cases} \tag{7}$$

将式(6)代入 Lagrange 方程,得

$$\alpha_1\ddot{x} + \delta^2\alpha_2 x + 2\delta^2\frac{\alpha_4}{l^2}x^3 + \frac{\alpha_3}{l^2}(x\dot{x}^2 + x^2\ddot{x}) = \alpha_5\ddot{a}_g(t) \tag{8}$$

考虑系统阻尼,悬臂梁的运动方程可表示为

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \gamma x + \alpha x^3 + \beta(x\dot{x}^2 + x^2\ddot{x}) = \varepsilon\ddot{a}_g(t) \tag{9}$$

其中

$$\mu = 2\zeta\omega, \gamma = \omega^2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\delta^2, \alpha = \frac{\alpha_4}{\alpha_1}\cdot\frac{2\delta^2}{l^2}, \beta = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 l^2}, \varepsilon = \frac{\alpha_5}{\alpha_1} \tag{10}$$

准确描述外部激励对随机振动分析具有重要意义。多数文献表明地震激励 $\ddot{a}_g(t)$ 是离散不规则过程[12,15],每次观测得到的时间历程样本都不相同,但总体样本符合泊松过程,而激励样本的功率谱密度大致是均匀分布的,因此可以用非平稳泊松白噪声模型描述,即平稳泊松白噪声激励 $W(t)$ 与时间调制函数 $h(t)$ 相乘。假定 N 为泊松计数过程,其到达速率函数 $\lambda(t)$ 通常取一段时间内脉冲振幅的平均达到速率 λ 。Y_i 是在 τ_i 时刻一系列零均值独立同分布的脉冲幅值,因此,$W(t)$ 可以表示为

$$W(t) = \sum_{i=1}^{N} Y_i\delta(t-\tau_i) \tag{11}$$

其中,$\delta(\cdot)$ 是 Dirac delta 函数。

考虑式(9)中含有位移与加速度耦合项,因此,需要采用近似方法将振动方程处理。式(9)可整理为

$$\ddot{x} = -\frac{1}{1+\beta x^2}(\mu\dot{x} + \gamma x + \alpha x^3 + \beta x\dot{x}^2) + \frac{\varepsilon h(t)W(t)}{1+\beta x^2} \tag{12}$$

假定 $\beta x^2 < 1$,$1/(1+\beta x^2)$ 可以取其泰勒级数展开式的前两项,即

$$\frac{1}{1+\beta x^2} = 1 - \beta x^2 \tag{13}$$

因此,式(12)可以近似写为

$$\ddot{x} = -(1-\beta x^2)(\mu\dot{x} + \gamma x + \alpha x^3 + \beta x\dot{x}^2) + \varepsilon(1-\beta x^2)h(t)W(t) \tag{14}$$

令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$,可以将式(14)写成如下的状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(1-\beta x_1^2)(\mu x_2 + \gamma x_1 + \alpha x_1^3 + \beta x_1 x_2^2) + \varepsilon G(x_1)h(t)W(t) \end{aligned} \tag{15}$$

其中,$G(x_1) = \varepsilon(1-\beta x_1^2)$,初始条件为

$$E[x_1;0] = E[x_2;0] = 0, E[x_1^2;0] = \sigma_1^2(0), E[x_2^2;0] = \sigma_2^2(0)$$

2　指数多项式闭合法

在泊松白噪声激励下,悬臂梁的响应是马尔科夫过程,其概率密度函数满足如下 FPK 方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial t} + x_2\frac{\partial p}{\partial x_1} - (1-\beta x_1^2)(\mu x_2 + \gamma x_1 + \alpha x_1^3 + \beta x_1 x_2^2)\frac{\partial p}{\partial x_2} - \\ &\frac{\partial[(1-\beta x_1^2)(\mu x_2 + \gamma x_1 + \alpha x_1^3 + \beta x_1 x_2^2)]}{\partial x_2}p - \\ &\frac{1}{2!}\lambda E[Y^2]G^2(x_1)h^2(t)\frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + \\ &\frac{1}{3!}\lambda E[Y^3]G^3(x_1)h^3(t)\frac{\partial^3 p}{\partial x_2^3} - \\ &\frac{1}{4!}\lambda E[Y^4]G^4(x_1)h^4(t)\frac{\partial^4 p}{\partial x_2^4} + \cdots = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

其中，p 是响应 x_1、x_2 的联合概率密度函数。通常方程仅保留非高斯激励的前四阶项，这是因为高阶项对整个方程的贡献很小。

该方程是一个二维演化类非线性偏微分方程，它的解析解很难求出。通常采用数值方法近似计算系统响应的概率密度函数。假定近似解表达式为

$$\tilde{p}[\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}(t)] = C\exp\{Q_n[\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}(t)]\} \tag{17}$$

其中，C 是归一化常数，而

$$\begin{cases} Q_n[\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}(t)] = \sum_{k=1}^{N_p} a_k(t) x_1^{r_1[k]} x_2^{r_2[k]} \\ r_1[k], r_2[k] = 0,1,2,\cdots,n \\ r_1[k] + r_2[k] = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{18}$$

将式(17)~(18)代入式(16)，等式右侧则出现误差，即

$$\Delta[\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}(t)] = \Bigg\{\frac{\partial Q_n}{\partial t} + x_2\frac{\partial Q_n}{\partial x_1} - (1-\beta x_1^2)(\mu x_2 + \gamma x_1 + \alpha x_1^3 + \beta x_1 x_2^2)\frac{\partial Q_n}{\partial x_2} - \frac{\partial[(1-\beta x_1^2)(\mu x_2 + \beta x_1 x_2^2)]}{\partial x_2} - \frac{1}{2!}\lambda E[Y^2]G^2(x_1)h^2(t)\left[\frac{\partial^2 Q_n}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial Q_n}{\partial x_2}\right)^2\right] - \frac{1}{4!}\lambda E[Y^4]G^4(x_1)h^4(t)\left[\frac{\partial^4 Q_n}{\partial x_2^4} + 4\frac{\partial Q_n}{\partial x_2}\frac{\partial^3 Q_n}{\partial x_2^3} + 3\left(\frac{\partial^2 Q_n}{\partial x_2^2}\right)^2 + 6\left(\frac{\partial Q_n}{\partial x_2}\right)^2\frac{\partial^2 Q_n}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial Q_n}{\partial x_2}\right)^4\right]\Bigg\}\tilde{p}[\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}(t)] = R[\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}(t)]\tilde{p}[\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}(t)] \tag{19}$$

采用伽辽金法优化 $R[\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}(t)]$ 使误差最小，即

$$\int_{\Re^2} R[\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}(t)]\omega_r[\boldsymbol{x};\boldsymbol{\sigma}(t)]\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,\quad r = 1,2,\cdots,N_p \tag{20}$$

其中 $\omega_r[\boldsymbol{x};\boldsymbol{\sigma}(t)]$ 是权重函数，可以取

$$\begin{cases} \omega_r[\boldsymbol{x};\boldsymbol{\sigma}(t)] = x_1^{m_1[r]} x_2^{m_2[r]} f_1[x_1,\sigma_1(t)] f_2[x_2,\sigma_2(t)] \\ m_1[r], m_2[r] = 0,1,2,\cdots,n \\ m_1[r] + m_2[r] = 1,2,\cdots,n, \quad r = 1,2,\cdots,N_p \end{cases} \tag{21}$$

其中：$f_1[x_1,\boldsymbol{\sigma}_1(t)]$，$f_2[x_2,\boldsymbol{\sigma}_2(t)]$ 分别是由高斯闭合法得到的 x_1 和 x_2 的边缘概率密度函数；$\boldsymbol{\sigma}_1(t)$、$\boldsymbol{\sigma}_2(t)$ 分别是 x_1 和 x_2 在时刻 t 的方差。

经过整理，式(20)变成了以待定系数 a_k 为变量的常微分方程组，通过四阶龙格库塔微分程序，可以较为快速地得到待定系数的解。求出待定系数后，通过归一化条件，可以得到系统响应的联合概率密度函数。

3 算例分析与讨论

悬臂梁采用长度 l =6 m 的 I32a(GB/T 706－1988)，计算方向为截面弱轴，一阶模态阻尼比 ζ = 0.02。考虑两种不同的情况，$a_1 = a_2 = 0$ 及 $a_1 = a_2 \neq 0$。前者可以模拟高耸建筑、信号塔、海上钻井平台等，后者可以模拟交通灯框架、广告牌等。本研究采用的单位：长度单位取 ×10 m 和时间单位取 ×0.1 s，算例的结果均是悬臂梁在端点处的响应统计量。算例考虑了平稳泊松白噪声和强度非平稳泊松白噪声激励的情况，考虑一致性，引入 Arias 强度，即

$$I = \int_0^\infty h^2(t)\mathrm{d}t \tag{22}$$

衡量地面运动的强度。同时，为了验证该计算方法的精度，采用蒙特卡洛模拟解与该近似解作对比，样本数量取 10^7。由于抗震分析一般基于承载力与变形计算，因此，本研究仅展示结构的位移响应结果。对于速度响应的结果，限于篇幅，在此不予展示。

3.1 Box-Car 型

首先考虑平稳泊松白噪声激励下的情况，即

$$h(t) = 1 \tag{23}$$

取到达率 λ = 20，激励强度为 $\lambda E[Y^2]$ = 0.5 $\mathrm{m^2/s^3}$。不考虑附加质量，即 $a_1 = a_2 = 0$。通过高斯闭合法，可得到响应的统计矩，结果如图 2 所示。其中，响应初值取 $\sigma_2^2(0) = 2\sigma_1^2(0) = 0.001$。

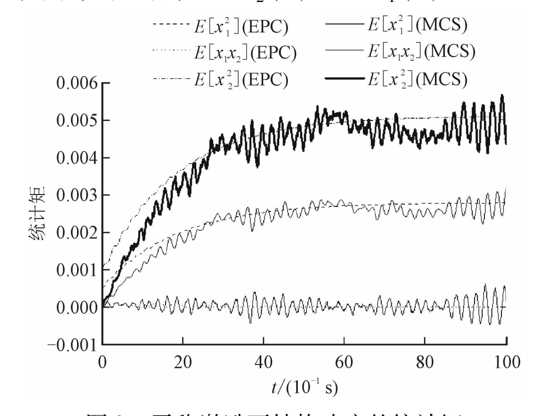


图2 平稳激励下结构响应的统计矩

Fig. 2 Moments of system responses under stationary excitation

从图 2 可知，高斯闭合法得到的响应统计矩与模拟解的结果吻合较好，随着时间演化，位移和速度的方差逐渐增大并在 t = 6 s 左右到达平稳。将结果

代入式(20)中,取截断水平 $n = 6$,响应的概率密度函数可以近似求得,如图 3 所示。从图可知,不同时刻的响应对数概率密度函数近似解与蒙特卡洛模拟解(MCS)吻合非常好,尤其在概率密度函数尾部。这表明在求解结构动力可靠性方面,EPC 法可以提供一个非常好的概率密度函数近似解。

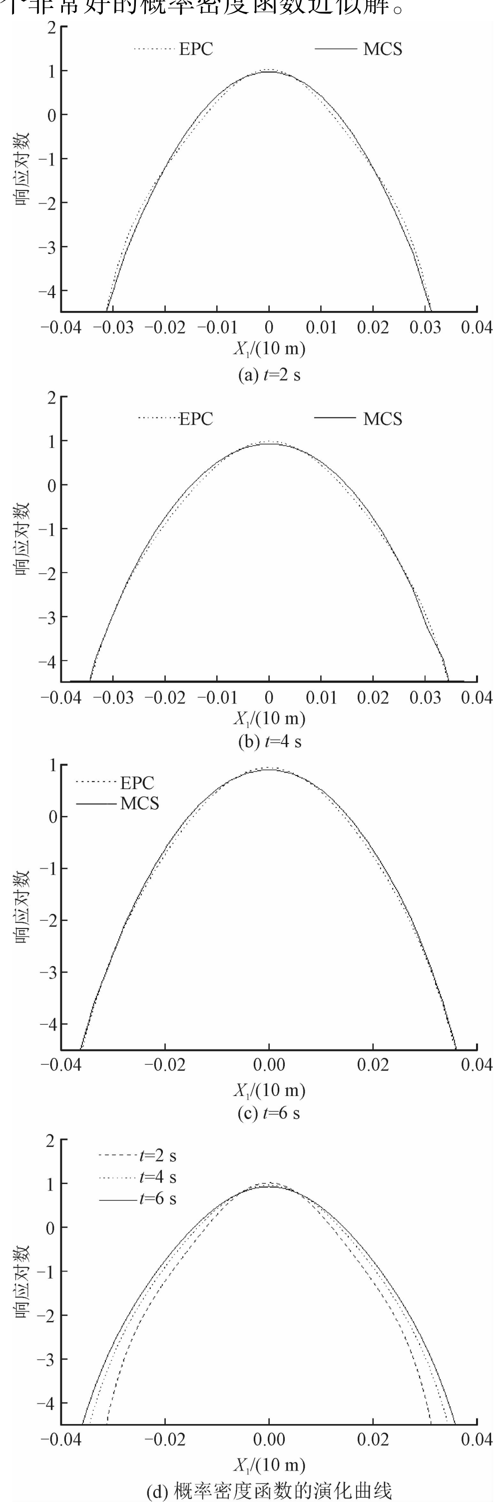


图 3　平稳激励下不同时刻位移的概率密度函数

Fig. 3　PDFs of displacement under stationary excitation at different time instants

位移的概率密度函数演化曲线如图 3(d)所示。从图可知,随着时间演化,位移概率密度函数曲线逐渐发散。计算结果表明在响应的统计矩达到平稳后曲线的概率密度发散程度最大,随后概率密度函数曲线保持不变。

保持激励强度 $\lambda E[Y^2] = 0.5\ \mathrm{m^2/s^3}$ 不变,分别取平均到达速率 $\lambda = 3,5,20$,不同时刻的对比结果如图 4 所示。从图可知随着到达速率的增大,概率密度函数曲线逐渐收缩。这表明如果到达速率不是足够大,将该激励看成高斯激励会使得计算结果偏于不安全。

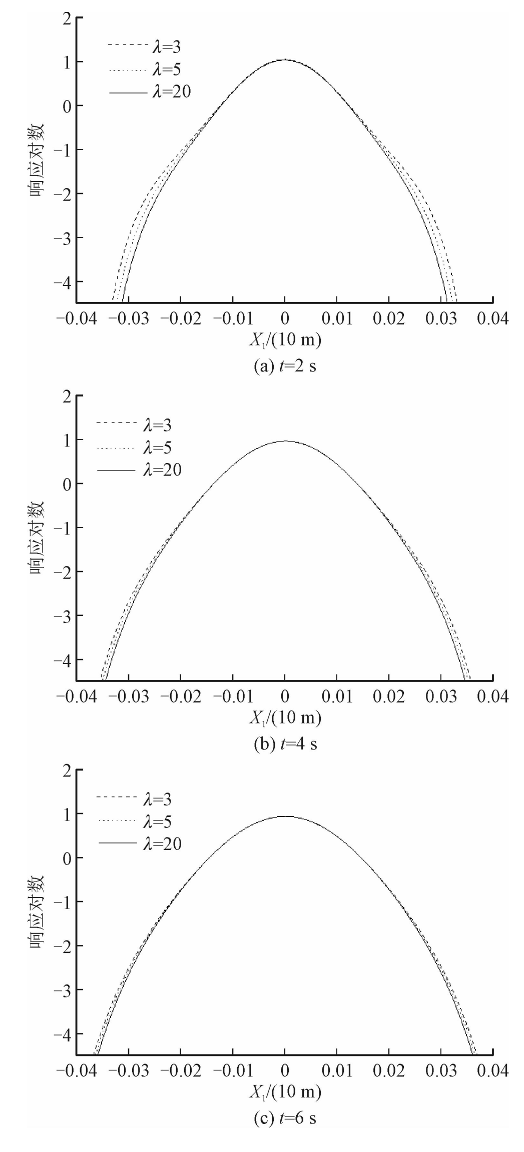


图 4　平稳激励下位移概率密度函数与到达速率关系图

Fig. 4　Comparison of PDFs of displacement under stationary excitation with different arrival rates

除此之外,不同激励强度下结构的位移概率密度函数曲线如图 5 所示。从图可知,随着激励强度

的增大,概率密度函数曲线逐渐发散。

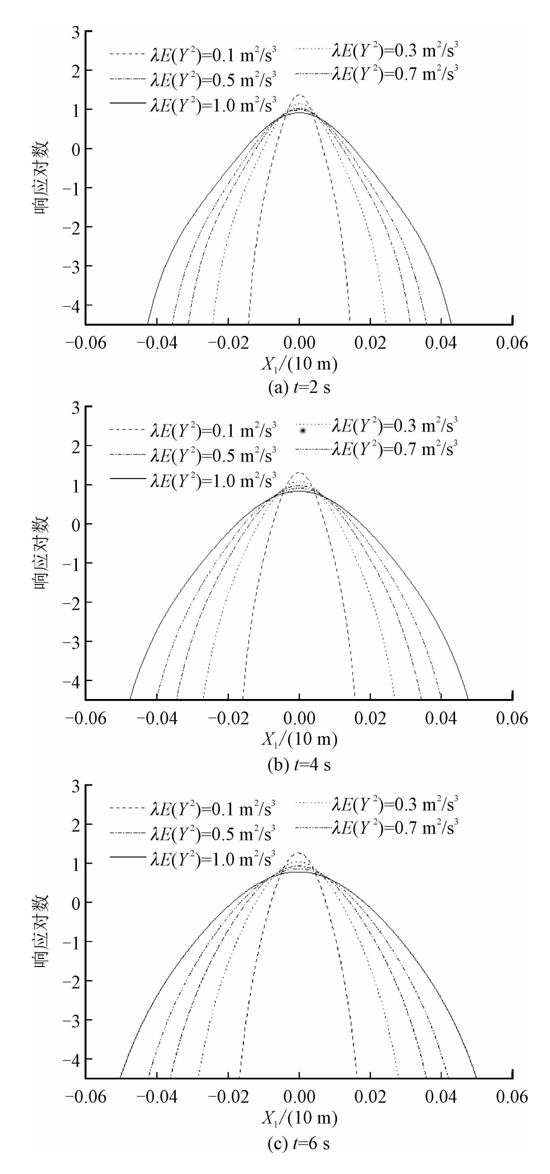


图5　平稳激励下位移概率密度函数与激励强度关系图

Fig. 5　Relationship between PDFs of displacement under stationary excitation and different excitation intensities

现考虑附加集中质量块对结构位移的概率密度函数的影响。由表达式(7)可知,改变 a_1 和 a_2 的值,仅引起 α_1、α_3、α_5 的改变,进而引起刚度 γ 、加速度非线性参数 β 和 ε 的改变,结果如图6所示。从图可知,附加质量主要影响结构的刚度 γ 及 ε ,加速度非线性参数 β 变化范围较小。因此,便于分析,取 $a_1=1.0$ 和 $a_2=1.0$ 两种情况研究附加质量对结构响应的影响,结果如图7所示。从图6～7可知,当 $a_1=1.0$ 时,随着 a_2 增加, ε 快速增加,位移概率密度函数曲线呈发散趋势;当 $a_2=1.0$ 时,随着 a_1 增加, ε 显著减小,概率密度函数曲线出现收缩的现象。

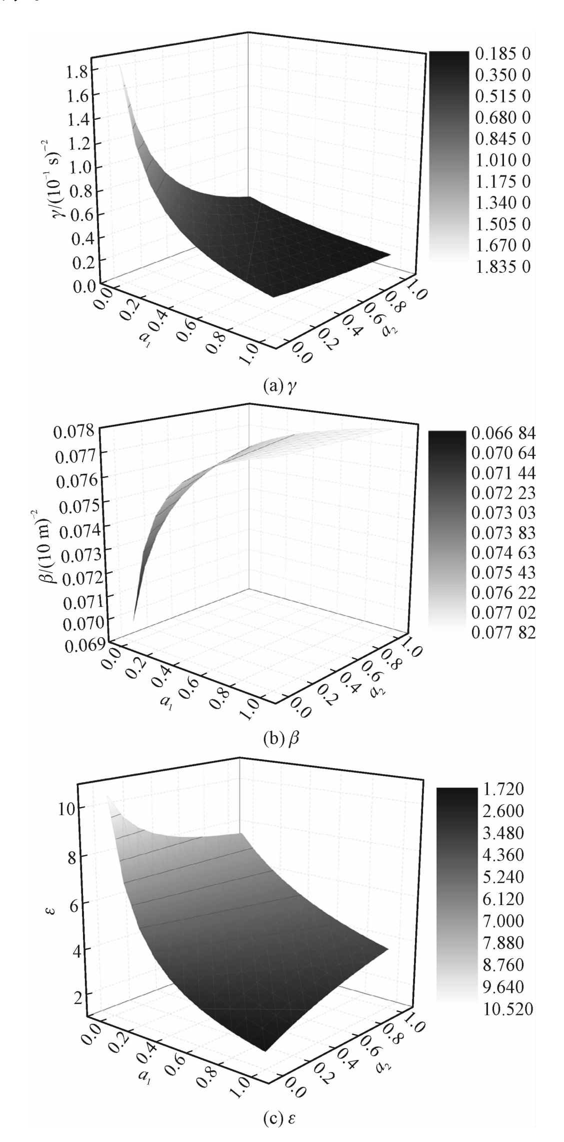


图6　结构参数与附加质量的关系图

Fig. 6　Effects of lumped mass on system parameters

3.2　指数型

当结构受到非平稳泊松白噪声激励时,通常激励强度随时间演化先增大后减小。为了模拟这一过程,可以采用 NARAYANA 等[16]提出的指数型函数作为时间调制函数。考虑一致性,经过 Arias 强度计算,取与平稳泊松白噪声激励持时 6 s 相同能量的指数型函数

$$h(t)=18.403(0.0735+0.1083t)\exp(-0.05632t) \tag{24}$$

作为时间调制函数。平均到达速率取 $\lambda=3$,激励强度 $\lambda E[Y^2]=0.5\ \mathrm{m^2/s^3}$ 。

首先,通过高斯闭合法求得结构响应的统计矩,同样,初值取 $\sigma_2^2(0)=2\sigma_1^2(0)=0.001$, 如图 8 所示。从图可知,位移和速度的方差随时间演化呈现先增大后减小的趋势,并在 $t=3$ s 时达到最大,随后快速趋近于零。

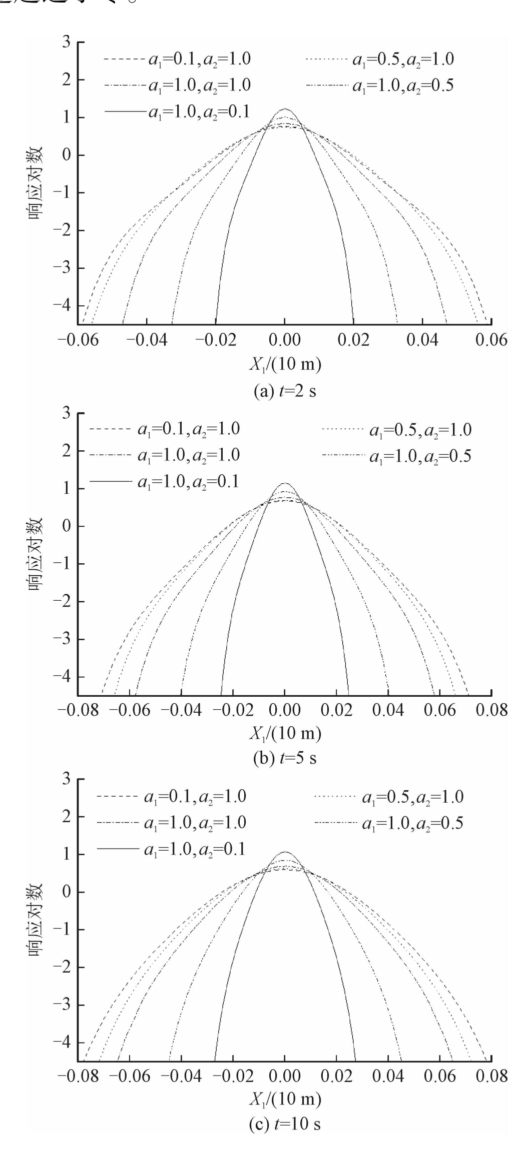


图 7　位移概率密度函数与附加质量的关系图

Fig. 7　Relationship between PDFs of displacement and different lumped masses

利用统计矩结果,采用 EPC 法求得位移响应的概率密度函数曲线,结果如图 9 所示。从图可知,随着时间演化,概率密度函数呈现先发散,后收缩的趋势,并且在 $t=3$ s 时发散程度最大,这与响应的方差演化趋势相同。

考虑不同的到达速率对结构响应的影响,分别取 $\lambda=3,5,20$,保持激励强度不变,以 $t=3$ s 为例,位移响应的概率密度函数如图 10 所示。从图可知,与前面平稳激励下系统响应计算结果相同,随着到达速率的增大,响应的概率密度函数曲线逐渐收缩。

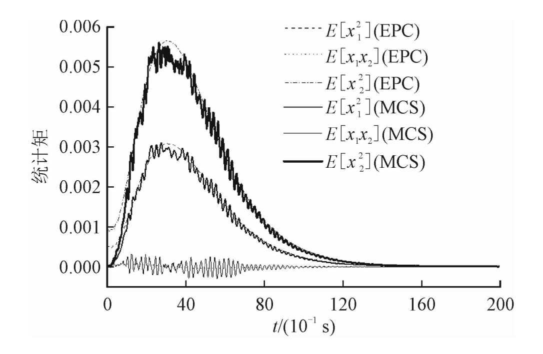


图 8　非平稳激励下结构响应的统计矩

Fig. 8　Moments of system responses under nonstationary excitation

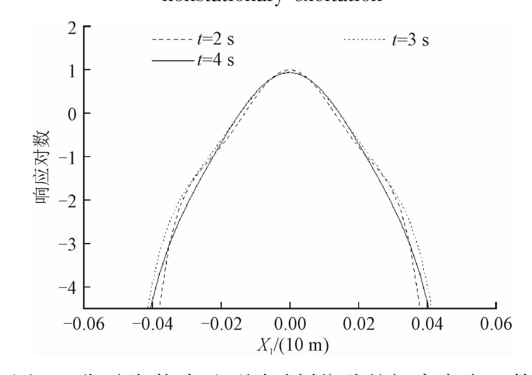


图 9　非平稳激励下不同时刻位移的概率密度函数

Fig. 9　Probability density functions of displacement under nonstationary excitation at different time instants

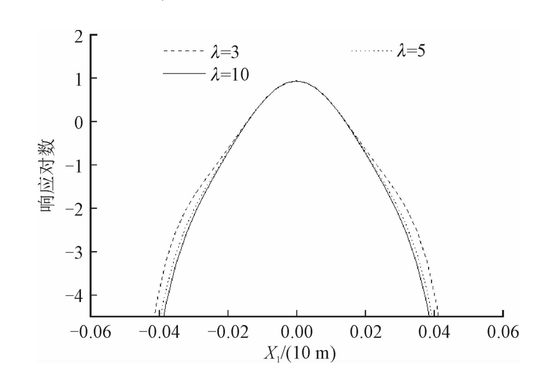


图 10　非平稳激励下位移概率密度函数与到达速率关系图

Fig. 10　Relationship between PDFs of displacement under nonstationary excitation and different arrival rates

最后,考虑不同激励强度对结构响应的影响,结果如图 11 所示。从图可知,与平稳激励下的情况相同,随着激励强度的增加,结构位移的概率密度函数呈发散趋势。

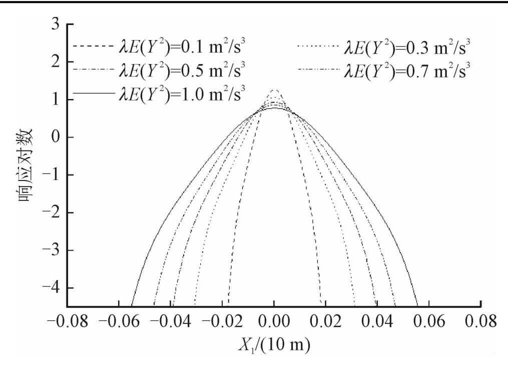


图11 非平稳激励下位移概率密度函数与激励强度关系图

Fig. 11 Relationship between PDFs of displacement under nonstationary excitation and different excitation intensities

4 结 论

本研究首先根据Lagrange方程建立了非高斯激励下附加集中质量块的悬臂梁随机微分方程,通过指数多项式闭合法求解了在平稳泊松白噪声激励和非平稳泊松白噪声激励下结构响应的概率密度函数,并分析了平均到达速率、激励强度和附加集中质量对结构的影响,主要结论有:1)采用指数多项式闭合法计算的结果与模拟解吻合较好,尤其是对可靠性分析起重要作用的尾部;2)平均到达速率增大,结构响应的概率密度函数曲线逐渐收缩,因此,将外部激励简单看作高斯激励会使得计算结果偏于不安全;3)激励强度越大,结构响应的概率密度函数越发散;4)附加集中质量块的质量保持不变,增大转动惯量,结构响应的概率密度函数曲线快速收缩;保持转动惯量不变,增大质量,结构响应的概率密度函数曲线呈发散趋势。

参考文献:

[1] CRESPO DA SILVA M R M,GLYNN C C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I. Equations of motion[J]. Journal of structural mechanics,1978,6(4):437-448.

[2] CRESPO DA SILVA M R M,GLYNN C C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. II. Forced motions[J]. Journal of structural mechanics,1978,6(4):449-461.

[3] HYER M W. Nonplanar motions of a base-excited cantilever[J]. Journal of structures and solids mechanics,1980,2:621-630.

[4] HAMDAN M N,DADO M H F. Large amplitude free vibrations of a uniform cantilever beam carrying an intermediate lumped mass and rotary inertia[J]. Journal of sound and vibration,1997,206(2):151-168.

[5] CHENG G F,MEI C,LEE R Y Y. Nonlinear vibration of a cantilever beam with tip mass under random base excitation[C]//19th AIAA Applied Aerodynamics Conference. Reston, VA, USA: AIAA,2001:AIAA 2001-1643.

[6] WANG Z M,LI R R. Transverse vibration of rotating tapered cantilever beam with hollow circular cross-section[J]. Shock and vibration,2018,2018:1056397.

[7] GRIGORIU M. Equivalent linearization for Poisson white noise input[J]. Probabilistic engineering mechanics,1995,10(1):45-51.

[8] DAI H Z,ZHENG Z B,WANG W. Nonlinear system stochastic response determination via fractional equivalent linearization and Karhunen-Loève expansion[J]. Communications in nonlinear science and numerical simulation,2017,49:145-158.

[9] LIU W Y,GUO Z J,YIN X R. Stochastic averaging for SDOF strongly nonlinear system under combined harmonic and Poisson white noise excitations[J]. International journal of non-linear mechanics,2020,126:103574.

[10] 郭永峰,董强,娄晓娟,等.周期信号和非高斯噪声联合激励下Brusselator系统的动力学行为[J].应用力学学报,2020,37(3):1266-1271.
GUO Yongfeng,DONG Qiang,LOU Xiaojuan,et al. Effects of combined periodic force and non-Gaussian noise on dynamic behavior of Brusselator model[J]. Chinese journal of applied mechanics,2020,37(3):1266-1271(in Chinese).

[11] PSAROS A F,BRUDASTOVA O,MALARA G,et al. Wiener path integral based response determination of nonlinear systems subject to non-white,non-Gaussian,and non-stationary stochastic excitation[J]. Journal of sound and vibration,2018,433:314-333.

[12] GUO S S,SHI Q X,XU Z D. Stochastic responses of nonlinear systems to nonstationary non-Gaussian excitations[J]. Mechanical systems and signal processing,2020,144:106898.

[13] ZHU H T. Probabilistic solution of a multi-degree-of-freedom duffing system under nonzero mean Poisson impulses[J]. Acta mechanica,2015,226(9):3133-3149.

[14] WAGNER H. Large-amplitude free vibrations of a beam[J]. Journal of applied mechanics,1965,32(4):887-892.

[15] GRIGORIU M. Response of dynamic systems to Poisson white noise[J]. Journal of sound and vibration,1996,195(3):375-389.

[16] NARAYANA I R,SUNDARA RAJA IYENGAR K T. A nonstationary random process model for earthquake accelerograms[J]. Bulletin of the Seismological Society of America,1969,59(3):1163-1188.

(编辑 史淑英)